YÜZEYLER TEORİSİ ARA SINAV SORULARI (07.12.2020)

Adı Soyadı:

Numarası:

1	2	3	4	5	Toplam

1.) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in E^3 | \; x_3 = x_1^2 + x_2^2\}$ yüzeyinin S şekil operatörüne karşılık gelen matrisini hesaplayınız **(20P.)**.

2.) E^3 de M, denklemi $x_1^2 + x_2^2 = 1$ olan silindir ve M üzerindeki α eğrisi de $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\alpha : I \to M, \; \alpha(t) = (\cos(at+b), \sin(at+b), ct+b)$$

ile verilmiş olsun. α eğrisinin silindir üzerinde bir geodezik olup olmadığını araştırınız **(20P.)**.

3.) $Z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) - 2$ paraboloidi üzerinde öyle bir nokta bulunuz ki, bu nokta $(0, 1, 0)$ noktasına en yakın nokta olsun(Lagrange Çarpan Teoreminden faydalanılacak) **(20P.)**.

4.) $M_1 = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid \; x_1^2 + x_2^2 = 4 \; \} \subset E^3$,

$M_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid \; x_1^2 - x_2^2 - 2x_3 = 0 \} \subset E^3$

yüzeylerinin arakesiti olan eğrinin $Q = (1, \sqrt{3}, ?)$ noktasındaki eğriliklerini bulunuz **(20P.)**.

5.) E^3 de bir yüzey M olsun. M nin parametrik ifadesi

$$\begin{array}{lcl} \Phi: I \times J \subset E^2 & \to & E^3 \\ (u, v) & \to & \Phi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)) \end{array}$$

olsun. $\{\Phi_u, \Phi_v\}$ sistemi $\chi(M)$ için bir ortogonal baz olsun. $V_1 = \frac{\Phi_u}{\|\Phi_u\|}$, $V_2 = \frac{\Phi_v}{\|\Phi_v\|}$ olmak üzere M yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$N = V_1 \wedge V_2 = \frac{1}{\|\Phi_u\| \|\Phi_v\|} \Phi_u \wedge \Phi_v$$ olsun. Bu durumda, $\frac{dN}{du}$ nin en sade şeklini hesaplayınız **(20P.)**.

NOT: Sorular eşit puanlı olup, süre 90 dakikadır. Prof. Dr. Ayhan TUTAR

CEVAPLAR

C-1) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in E^3 \mid x_3 = x_1^2 + x_2^2\}$

yüzeyinin S şekil operatörünü hesaplayınız.

ÇÖZÜM: $x_1 = u\cos v$,

$x_2 = u \sin v$

dersek

$x_3 = u^2\cos^2 v + u^2 \sin^2 v \Rightarrow x_3 = u^2$. Böylece M nin parametrik ifadesi

$$\Phi : E^2 \longrightarrow E^3$$
$$(u,v) \longrightarrow \Phi(u,v) = (u\cos v,\ u\sin v,\ u^2)$$

dir.

$\Phi_u = (\cos v, \sin v, 2u)$, $\|\Phi_u\| = \sqrt{1+4u^2}$

$\Phi_v = (-u\sin v, u\cos v, 0)$, $\|\Phi_v\| = u$,

$\langle \Phi_u, \Phi_v \rangle = -u\sin v\cos v + u\sin v \cos v = 0$. olduğundan $\{\Phi_u, \Phi_v\}$ sistemi $\chi(M)$ için bir ortogonal bazdır. Normlayarak,

$$X = \frac{\Phi_u}{\|\Phi_u\|} = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2}}(\cos v, \sin v, 2u),$$

$$Y = \frac{\Phi_v}{\|\Phi_v\|} = \frac{1}{u}(-u\sin v, u\cos v, 0) = (-\sin v, \cos v, 0)$$

olmak üzere $\{X, Y\}$ sistemi $\chi(M)$ için bir ortonormal bazdır. M nin şekil operatörü S olmak üzere

$$S(X) = D_X N = D_{\frac{1}{\|\Phi_u\|}\Phi_u} N = \frac{1}{\|\Phi_u\|} D_{\Phi_u} N = \frac{1}{\|\Phi_u\|}\cdot\frac{\partial N}{\partial u},$$

$$S(Y) = D_Y N = D_{\frac{1}{\|\Phi_v\|}\Phi_v} N = \frac{1}{\|\Phi_v\|} D_{\Phi_v} N = \frac{1}{\|\Phi_v\|}\cdot\frac{\partial N}{\partial v}.$$

$$N = X \wedge Y = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2}}(-2u\cos v, -2u\sin v, 1)$$

elde edilir. Burada u ve v ye göre kısmi türevler alınırsa;

$$\frac{\partial N}{\partial u} = \frac{-2}{(1+4u^2)^{3/2}}(\cos v, \sin v, 2u),$$

$$\frac{\partial N}{\partial v} = \frac{-2u}{\sqrt{1+4u^2}}(-\sin v, \cos v, 0)$$

bulunur. Bu değerler yukarıda yerlerine yazılırsa

$$S(X) = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2}} \cdot \frac{-2}{(1+4u^2)^{3/2}} (\cos v, \sin v, 2u)$$

$$\Rightarrow S(X) = \frac{-2}{(1+4u^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+4u^2}} \cdot (\cos v, \sin v, 2u)$$

$$\Rightarrow S(X) = \frac{-2}{(1+4u^2)^{3/2}} X$$

ve

$$S(Y) = \frac{-2\cancel{u}}{\cancel{u}(1+4u^2)^{1/2}} (-\sin v, \cos v, 0)$$

$$\Longrightarrow S(Y) = \frac{-2}{\sqrt{1+4u^2}} Y$$

bulunur. Buna göre, S şekil operatörünün matrisi için

$$S = \begin{bmatrix} \frac{-2}{(1+4u^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{1+4u^2}} \end{bmatrix}$$

elde edilir.

c - 2) $\alpha'(t) = (-a\sin(at+b),\ a\cos(at+b),\ c)$

$\alpha''(t) = (-a^2\cos(at+b),\ -a^2\sin(at+b),\ 0)$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$$

$$\Rightarrow N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{\cancel{2}(x_1, x_2, 0)}{\cancel{2}\sqrt{\underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{1}}}$$

$$\Rightarrow N = (x_1, x_2, 0).$$

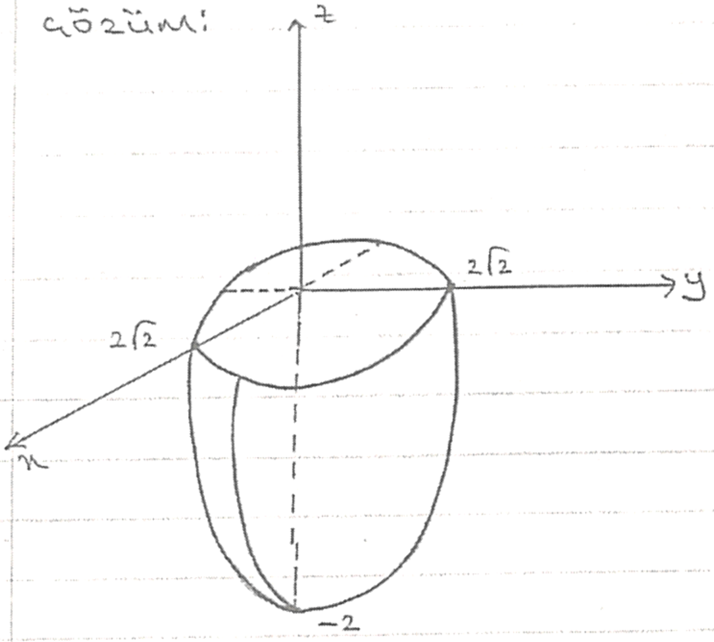
$$\Rightarrow N\Big|_{\alpha(t)} = (\cos(at+b),\ \sin(at+b),\ 0).$$

Buna göre; $\alpha''(t) = -a^2 N\Big|_{\alpha(t)}$ olduğundan $\alpha''(t) \perp T_M(\alpha(t))$.

O halde α eğrisi silindir üzerinde geodezik bir eğridir.

Soru 3: $z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)-2$ paraboloidi üzerinde öyle bir nokta bulunuz ki bu nokta $(0,1,0)$ noktasına en yakın nokta olsun (Lagrange Çarpan Teoreminden faydalanınız).

Çözüm:



$$z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)-2 \Rightarrow z=\frac{x^2+y^2-8}{4}$$

$\Rightarrow x^2+y^2-4z-8=0$ bulunur.

Buradan,

$g(x,y,z)=x^2+y^2-4z-8=0$

ve (x,y,z) ile $(0,1,0)$ noktaları arasındaki uzaklık ifadesinden

$f(x,y,z)=x^2+(y-1)^2+z^2$

yazabiliriz.

$\nabla g=(2x,2y,-4)$,

$\nabla f=(2x,2(y-1),2z)$

olduğundan Lagrange çarpan teoreminden

$$\nabla f=\lambda\nabla g$$

veya buradan

$$(x,y-1,z)=\lambda(x,y,-2)$$

olup, söz konusu noktada

$$\begin{cases} x=\lambda x \\ y-1=\lambda y \\ z=-2\lambda \\ x^2+y^2-4z=8 \end{cases}$$

sağlanmalıdır. Eğer $x\neq 0$ ise $\lambda=1$ olur. Bu ise $y-1=\lambda y$ den $-1=0$ çelişkisini elde ederiz. O halde $x=0$ olmalıdır. $x=0$, $y=\frac{1}{1-\lambda}$, $z=-2\lambda$ değerini son denklemde yerine yazarsak

$$0+\frac{1}{(1-\lambda)^2}-4(-2\lambda)=8 \Rightarrow \frac{1+8\lambda(1-\lambda)^2}{(1-\lambda)^2}=8$$

$$\Rightarrow 8\lambda^3-24\lambda^2+24\lambda-7=0$$

$1/2$	8	-24	24	-7
		4	-10	7
	8	-20	14	0

$\Rightarrow (\lambda-\frac{1}{2})(8\lambda^2-20\lambda+14)=0$

$\Rightarrow (\lambda-\frac{1}{2})(4\lambda^2-10\lambda+7)=0$

$4\lambda^2-10\lambda+7=0$ denkleminin kökle- rini araştıralım:

$\Delta=b^2-4ac$ den $\Delta=100-4.4.7=-12<0$ olduğun- dan kökler sanaldır. Buna göre,

$8\lambda^3-24\lambda^2+24\lambda-7=0$ denkleminin yalnız bir reel kökü vardır ve o da $\lambda=\frac{1}{2}$ dir.

Buna göre, f için M üzerinde $z=-1$, $x=0$ ve $x^2+y^2-4z=8$ den $0+y^2-4.(-1)=8 \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y=\mp 2$.

$A_1=(0,-2,-1)$, $A_2=(0,2,-1)$ noktaları kritik noktalardır.

$f(A_1)=10$, $f(A_2)=2$ olduğundan; $A_2=(0,2,-1)\in M$ noktası $(0,1,0)$ noktasına M üzerinde en yakın nokta- dır.

$\lambda=\frac{1}{2}$ için $z=-2\lambda$ dan $z=-2.\frac{1}{2}=-1$

C-4) $M_1 = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2+x_2^2=4\} \subset E^3$,
$M_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2-x_2^2-2x_3=0\} \subset E^3$
yüzeylerinin arakesiti olan eğrinin $Q=(1,\sqrt{3},?)$ noktasındaki eğriliklerini bulunuz.

ÇÖZÜM: $x_1^2+x_2^2=4 \Rightarrow x_1=2\cos t,\ x_2=2\sin t$ yazabiliriz.

$x_1^2-x_2^2-2x_3=0 \Rightarrow 4\cos^2 t - 4\sin^2 t = 2x_3$

$$\Rightarrow x_3 = 2\cos^2 t - 2\sin^2 t = 2\,\underbrace{(\cos^2 t-\sin^2 t)}_{\cos 2t}$$
$$\Rightarrow x_3 = 2\cos 2t.$$

Buna göre; M_1 ve M_2 yüzeylerinin arakesit eğrisinin bir parametrizasyonu

$$\alpha : I \longrightarrow M_1 \cap M_2 \subset E^3$$
$$t \longrightarrow \alpha(t) = (2\cos t,\ 2\sin t,\ 2\cos 2t)$$

dir. Buradan,

$$\left.\begin{array}{l} x_1(P)=1 \Rightarrow 1 = 2\cos t \Rightarrow \cos t = 1/2 \\ x_2(P)=\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} = 2\sin t \Rightarrow \sin t = \sqrt{3}/2 \end{array}\right\} \Rightarrow t=\frac{\pi}{3}.$$

$x_3(P) = 2\cos 2.\frac{\pi}{3} = 2\cos\frac{2\pi}{3} = 2.\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ dir. O halde,
$Q=(1,\sqrt{3},-1)$ olarak elde edilir.

$\alpha'(t) = (-2\sin t,\ 2\cos t,\ -4\sin 2t) \Rightarrow \alpha'(\pi/3) = (-\sqrt{3},\ 1,\ -2\sqrt{3})$,
$\alpha''(t) = (-2\cos t,\ -2\sin t,\ -8\cos 2t) \Rightarrow \alpha''(\pi/3) = (-1,\ -\sqrt{3},\ 4)$,
$\alpha'''(t) = (2\sin t,\ -2\cos t,\ 16\sin 2t) \Rightarrow \alpha'''(\pi/3) = (\sqrt{3},\ -1,\ 8\sqrt{3})$.

$$k_1(\pi/3) = \frac{\|\alpha'(\pi/3)\times\alpha''(\pi/3)\|}{\|\alpha'(\pi/3)\|^3} \quad \text{ve} \quad k_2(\pi/3) = \frac{\det(\alpha'(\pi/3),\alpha''(\pi/3),\alpha'''(\pi/3))}{\|\alpha'(\pi/3)\times\alpha''(\pi/3)\|^2}$$

formüllerinden $k_1(\pi/3)$ ve $k_2(\pi/3)$ değerlerini hesaplayalım.

$$\alpha'(\pi/3)\times\alpha''(\pi/3) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sqrt{3} & 1 & -2\sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} & 4 \end{vmatrix} = -2e_1 + 6\sqrt{3}\,e_2 + 4e_3$$

$$\Rightarrow \|\alpha'(\pi/3)\times\alpha''(\pi/3)\| = \sqrt{(-2)^2+(6\sqrt{3})^2+4^2} = \sqrt{128} = \sqrt{2.64} = 8\sqrt{2}.$$

$$\| \alpha'(\pi/3) \| = \sqrt{16} = 4$$

$$\det(\alpha'(\pi/3), \alpha''(\pi/3), \alpha'''(\pi/3)) = \langle \alpha'(\pi/3) \wedge \alpha''(\pi/3), \alpha'''(\pi/3) \rangle$$
$$= \langle (-2, 6\sqrt{3}, 4), (\sqrt{3}, -1, 8\sqrt{3}) \rangle$$
$$= -2\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 32\sqrt{3}$$
$$= 24\sqrt{3}.$$

$$k_1(\pi/3) = \frac{8\sqrt{2}}{16 \cdot 4} = \frac{\sqrt{2}}{8},$$

$$k_2(\pi/3) = \frac{\overset{3}{\cancel{24}}\sqrt{3}}{\underset{8}{\cancel{64}} \cdot 2} = \frac{3\sqrt{3}}{16} \quad \text{bulunur.}$$

Mat 497 Yüzeyler Teorisi

Ç-5)

$$N = V_1 \wedge V_2 = \frac{1}{\|\Phi_u\| \|\Phi_v\|} \Phi_u \wedge \Phi_v$$ dir. Buradan,

$$N = (\Phi_u \wedge \Phi_v)\left[\langle \Phi_u, \Phi_u \rangle^{-1/2} \cdot \langle \Phi_v, \Phi_v \rangle^{-1/2}\right]$$ yazılabilir.

$$\frac{dN}{du} = \frac{\Phi_{uu} \wedge \Phi_v + \Phi_u \wedge \Phi_{vu}}{\|\Phi_u\| \|\Phi_v\|} - \frac{1}{2} \Phi_u \wedge \Phi_v \frac{\langle \Phi_{uu}, \Phi_u \rangle + \langle \Phi_u, \Phi_{uu} \rangle}{\langle \Phi_u, \Phi_u \rangle^{3/2} \cdot \langle \Phi_v, \Phi_v \rangle^{1/2}}$$

$$- \frac{1}{2} \Phi_u \wedge \Phi_v \frac{\langle \Phi_{vu}, \Phi_v \rangle + \langle \Phi_v, \Phi_{vu} \rangle}{\langle \Phi_v, \Phi_v \rangle^{3/2} \cdot \langle \Phi_u, \Phi_u \rangle^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{du} = \frac{\Phi_{uu} \wedge \Phi_v + \Phi_u \wedge \Phi_{vu}}{\|\Phi_u\| \|\Phi_v\|} - \Phi_u \wedge \Phi_v \frac{\langle \Phi_u, \Phi_{uu} \rangle}{(\|\Phi_u\|^2)^{3/2} \cdot \|\Phi_v\|}$$

$$- \Phi_u \wedge \Phi_v \frac{\langle \Phi_{vu}, \Phi_v \rangle}{\underbrace{(\|\Phi_v\|^2)^{3/2}}_{\|\Phi_v\|^3} \cdot \|\Phi_u\|}$$

elde edilir.